

使い方

- まず自分で10分程度考える
- 方針が立たない場合のみ参照
- ヒントは「考えるきっかけ」であり、答えは記載されていません

状態遷移を考える

return ...

...

キーポイント

- マルコフ連鎖的な状態遷移
- 極限: $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ は定常分布

Q1 のヒント (微分・積分)

アプローチ

- (1) $f'(x)=0$ の解を求める (2次方程式)
- (2) $f(x)=0$ の解を因数定理で求め、定積分で面積計算
- (3) 接線の式を立て、原点を通る条件から t を決定
- (4) 接線と曲線の交点を求めて積分

数値計算のヒント

- 3次関数の積分: $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$
- 面積は絶対値で取る: $\int_a^b |f(x)| dx$

Q3 のヒント (空間図形・ベクトル)

アプローチ

- (1) ベクトルの差: $|\vec{AB}| = |\vec{b} - \vec{a}|$
- (2) 内積と外積の関係: $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$
- (3) 射影の考え方: $h = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$
- (4) スカラー三重積: $V = \frac{1}{6} |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$

行列的アプローチ (参考)

グラム行列を使うと、外積の大きさを計算せずに面積・体積が求まります。

Q2 のヒント (確率・数列)

アプローチ

- (1) 状態空間: (赤の数, 白の数) のペアで考える
- (2) 漸化式: p_{n+1} を p_n と補助的な確率で表現
- 補助変数: q_n = 「 n 回目で赤=白」の確率
- (3) 特性方程式または母関数を使って極限を求める

プログラムのな理解

python

疑似コード

```
def p(n):
    if n == 1:
        return 2/5 # 赤を引く確率
    else:
```

Q4 のヒント (整数)

アプローチ

- (1) 拡張ユークリッドの互除法 ($\text{GCD}(13, 17) = 1$ より解が存在)
- アルゴリズム的には逆向きに辿る
- (2) 一般解: $(x, y) = (x_0, y_0) + k(17, -13)$
- (3) 合同式による証明

- $\text{mod } 30$ を $\text{mod } 5$ と $\text{mod } 6$ に分解 (中国剰余定理の逆)

- $-13 \equiv -17 \pmod{30}$ は使えるか?

プログラムのな理解

python

拡張ユークリッド互除法

```
def extended_gcd(a, b):  
    if b == 0:  
        return a, 1, 0  
    else:  
        gcd, x1, y1 = extended_gcd(b, a % b)  
        x = y1  
        y = x1 - (a // b) * y1  
    return gcd, x, y  
...
```

キーポイント

- $\gcd(13,17)=1$ $\gcd(13, 17) = 1$ なので Bézout の等式が成立
- 合同式: $a \equiv b \pmod m$ $a \equiv b \pmod m$ は $a \bmod m = b \bmod m$ $a \bmod m = b \bmod m$

Q5 のヒント（複素数平面）

アプローチ

- (1) $|z-1| = |z-i|$ $|z-1| = |z-i| \rightarrow$ 2点の垂直二等分線

- 複素数表記: $z=x+yi$ $z = x + yi$ で実部・虚部を分離

- (2) 直線と円の交点（連立方程式）
- (3) $w=z^2$ $w = z^2$ の幾何的意味

- 極形式: $z=re^{i\theta}$ $z = re^{i\theta} \rightarrow w=r^2e^{2i\theta}$ $w = r^2e^{2i\theta}$

- 偏角が2倍、絶対値が2乗

複素数の幾何的操作

- 回転: $z \rightarrow e^{i\alpha}z$ $z \rightarrow e^{i\alpha}z$
- 拡大: $z \rightarrow kz$ $z \rightarrow kz$ ($k \in \mathbb{R}$)
- 2乗: 偏角が2倍になるので、直線は放物線のような曲線になる

一般的なアドバイス

東大数学の特性

- 単元横断型の思考力を試す
- 典型問題の変形が多い
- 部分点戦略が重要

てつやさんの強み（物理・数学・情報）を活かす

- 物理的直感: ベクトル問題は力のモーメントや座標系と類似
- 数学的厳密さ: 証明問題では論理の飛躍を避ける
- アルゴリズム的思考: 整数問題・確率問題でプログラムの考える

情報系の知識との対応

数学概念	情報系の対応
確率漸化式	状態遷移確率、マルコフ連鎖
不定方程式	ユークリッド互除法、GCD/LCM
合同式	モジュロ演算 ($a \% m$)
複素数の回転	2D座標変換、回転行列

復習のポイント

- 解答を見る前に、別解を探す
- 計算量・時間複雑度を考える（試験では30分/問）
- エレガントな解法を追求する

Good luck!