

使い方

- 問題を読んで、自分で考えてみる
- 行き詰まったら、このヒントを参考にする
- わかる部分だけでも取り組んでみる
- 高校で習う内容は「こういうものがあるんだ」と知るだけでもOK

ポイント: 今の知識で「部分的にでも理解できる部分」を探してみましょう。

Q1 のヒント (微分・積分)

高校内容ですが、部分的に挑戦できます

何を学ぶ分野か

- **微分:** 関数の「変化の様子」を調べる (グラフの傾きを求める)
- **積分:** グラフと軸で囲まれた「面積」を求める

今の知識でできること

(1) 極値を求める:

- まだ習っていない「微分」という計算が必要です
- $f'(x)=3x^2-6x$ $f'(x)=3x^2-6x$ という式を作り、 $f'(x)=0$ $f'(x)=0$ となる x を探します
- これは中学で習う「2次方程式」に似ています

(2) x 軸との交点を求める:

- $f(x)=0$ $f(x)=0$ を解きます $\rightarrow x^3-3x^2+2=0$ $x^3-3x^2+2=0$
- **因数定理**を使います: $f(1)=0$ $f(1)=0$ なので、 $(x-1)$ で割り切れます
- これは中学入試の「整数問題」と似た考え方です

アプローチ

- グラフを描くイメージを持つと理解しやすいです
- $x=0,1,2,3$ $x=0,1,2,3$ のときの $f(x)$ $f(x)$ の値を計算してみましょう

Q2 のヒント (確率・数列)

一部は中学入試の知識で理解できます

何を学ぶ分野か

- **確率:** ある事象が起こる割合
- **漸化式:** 「次の値が前の値でどう決まるか」を表す式
- **極限:** 無限に続けたときの値

今の知識でできること

(1) p_1, p_2, p_3 を求める:

- これは場合分けして数える問題 (中学入試で頻出)
- $n=1$ $n=1$: 赤を引く確率は $\frac{2}{5}$
- $n=2$ $n=2$: (赤, 赤)、(赤, 白)、(白, 赤)、(白, 白) の4パターンを考える
- 「赤>白」になるのはどのパターンか?

アプローチ

- 樹形図を描いてみる
- 各パターンの確率を計算する
- 条件を満たすものを足し合わせる

(2)と(3)は高校内容: 漸化式と極限の計算が必要です。

Q3 のヒント (空間図形・ベクトル)

中学入試の空間図形に近い内容です！

何を学ぶ分野か

- **ベクトル:** 向きと大きさを持つ量 (矢印のイメージ)
- **内積:** 2つのベクトルの関係を表す計算

今の知識でできること

(1) 辺ABの長さ:

- $|\vec{AB}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2$ という公式を使います
- 展開すると: $|\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta + |\vec{a}|^2$
- 与えられた値を代入: $3^2 - 2 \times 3 + 2^2 = 9 - 6 + 4 = 7$

(2) 三角形OABの面積:

- $\cos\theta \cos\theta = \cos^2\theta$ を内積から求める:
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta$
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta$
- $\sin\theta \sin\theta = \sin^2\theta$ を $\sin 2\theta + \cos 2\theta = 1$ から求める
 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から求める
- 面積 = $\frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin\theta$

アプローチ

- 立体をイメージして図を描いてみる
- 既知の三角形の公式（面積、体積）が使えないか考える

Q4 のヒント（整数）

中学入試の整数問題と近い内容です！

何を学ぶ分野か

- 不定方程式: 解が無数にある方程式
- 合同式: 「割った余りで考える」 数学

今の知識でできること

(1) 整数解を1組求める:

- 試行錯誤で探せます！
- $13 \times 13 = 169$ と $17 \times 17 = 289$ を調整して、差が1になるものを探す
- ヒント: $13 \times 4 = 52$, $13 \times 13 = 169$, $17 \times 3 = 51$, $17 \times 17 = 289$ から差が1になるものを探す

(2) すべての整数解:

- (1)で1組見つかったら、そこから周期的にずらしていきます
- 一般解: $x = x_0 + 17k$, $y = y_0 - 13k$ (kは整数)

(3) 証明問題:

- 「30で割り切れる」 = 「5でも6でも割り切れる」
- $13 \equiv 3 \pmod{5}$, $17 \equiv 2 \pmod{5}$ のように考えます

アプローチ

- (1)は実験的に試す
- (2)はパターンを見つける
- (3)は「余りで分類」する考え方（合同式）

何を学ぶ分野か

- 複素数: $a+bi$ という形の数 (iは特殊な数)
- 複素数平面: 複素数を座標平面上の点として表す

今の知識でできること

(1) 軌跡を図示:

- $|z-1| = |z-i|$ は「点1と点iから等距離にある点」
- これは「2点の垂直二等分線」です（中学で習った内容！）
- $z = x+iy$ として計算すると、直線の式が求まります

(2) 交点を求める:

- (1)の直線と、円 $|z|=1$ の交点を求める
- これは「直線と円の交点」を求める問題（中学数学）

アプローチ

- $z = x+iy$ として計算する
- $|z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$, $|z-i| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$ を計算する
- 両辺を2乗して整理する

(3)は高校内容: $w = z^2$ の性質（偏角が2倍になる）を使います。

ひかりさんへのメッセージ

中学入試のカリキュラムで学んだ内容が、東大数学の土台になっています。

特に以下の分野は直結しています：

すでに持っている強み:

- 場合分けと論理的思考（確率問題に活きる）
- 空間図形の把握力（ベクトルに活きる）
- 整数問題の試行錯誤力（不定方程式に活きる）
- 座標平面の理解（複素数平面に活きる）

IT系の知識を活かそう:

- Q2の漸化式は「プログラムのループ」と似ています
- Q4の合同式は「mod演算（剰余）」と同じ考え方です

Q5 のヒント（複素数平面）

高校内容ですが、座標平面として考えられます

これから学ぶと良いこと:

- 中学数学: 文字式、方程式、関数、図形の証明
- 高校数学: 微分積分、ベクトル、確率、整数論

記憶力が高いことは数学でも大きな武器です。

公式や定理を覚えるだけでなく、「なぜそうなるか」を理解すると、

応用力がさらに伸びます。頑張ってください！🚀