

ヒント集 - 試験 00013

ヒント集 - 試験 00013

東京大学レベルの数学問題は、基本的な知識と発想力の組み合わせで解けるように設計されています。

このヒント集は、行き詰まったときの「考える方向性」を示すものです。

Q1 のヒント (微分・積分)

アプローチ:

- (1) 極値は $f'(x)=0$ となる点で求められます。3次関数の微分は2次関数になります。
- (2) まず $f(x)=0$ を解いて、 x 軸との交点を求めましょう。因数定理が使えます。
- (3) 点 $(t, f(t))$ における接線の式を立て、それが原点 $(0,0)$ を通る条件を考えます。
- (4) 接線と曲線で囲まれる面積は、「上の関数 - 下の関数」を積分します。

キーポイント:

- 因数定理: $f(a)=0$ ならば $f(x)$ は $(x-a)$ で割り切れる
- 接線の傾きは $f'(t)$ 、接線の式は $y-f(t)=f'(t)(x-t)$
- 面積計算では、交点を正確に求めることが重要

Q2 のヒント (確率・数列)

アプローチ:

- (1) 小さい n では場合分けして直接数える方法が有効です。
- $n=1$: 赤1回 vs 白1回のどちらが起きるか
- $n=2$: (赤,赤), (赤,白), (白,赤), (白,白) の4通りを考える
- (2) $n+1$ 回目の試行で何が起きるかを場合分け。
- n 回目まで赤>白だった場合、 $n+1$ 回目に赤/白が出る確率
- n 回目まで赤=白だった場合、 $n+1$ 回目に赤が出る確率
- n 回目まで赤<白だった場合は p_{n+1} に寄与しない
- (3) 漸化式を解いて一般項を求め、極限を取ります。

キーポイント:

- 確率漸化式は「次の状態は今の状態にどう依存するか」を考える
- 赤玉を引く確率は $2/52$ 、白玉を引く確率は $3/53$
- 漸化式が $p_{n+1}=ap_n+bp_{n+1}$ の形になったら、特性方程式を使う

Q3 のヒント (空間図形・ベクトル)

アプローチ:

- (1) $|\vec{AB}|^2 = |\vec{b}-\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2$
 $|\vec{AB}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2$
- (2) 三角形の面積は $\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ です。まず $\cos\theta$ を内積から求めます。
- (3) 垂線の長さ h は、体積を使って逆算できます:
 $V = \frac{1}{3}(\triangle OAB \text{の面積}) \times h$
- (4) スカラー三重積 $|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$ を使うか、(2)と(3)を組み合わせます。

キーポイント:

- ベクトルの内積: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$
- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から $\sin\theta$ を求める
- 空間の四面体の体積公式

Q4 のヒント (整数)

アプローチ:

- (1) 拡張ユークリッドの互除法、または試行錯誤で1組見つけます。
- $13 \times 4 = 52 \approx 51 = 3 \times 17$
- $13 \times 4 - 17 \times 3 = 113$ を確認
- (2) (1)の特殊解に、一般解の形を加えます: $x = x_0 + 17k, y = y_0 - 13k$ (kkkは整数)
- (3) 合同式を使います: $13 \equiv -17 \pmod{30}$ に注目すると、 $13^n + 17^n$ の性質が見えてきます。

- $13 \equiv 13 \pmod{30}$, $17 \equiv 17 \pmod{30}$

$13 \equiv -2 \pmod{5}$, $17 \equiv 2 \pmod{5}$

$13 \equiv 1 \pmod{6}$, $17 \equiv 5 \equiv -1 \pmod{6}$

$13 \equiv 1 \pmod{6}$, $17 \equiv 5 \equiv -1 \pmod{6}$

キーポイント:

- 不定方程式の一般解: 1つ特殊解が見つければ、あとは周期的にずらす
- $30 = 5 \times 6$ なので、 $\text{mod } 5$ と $\text{mod } 6$ で両方0になることを示す
- フェルマーの小定理も使えるかもしれません

Q5 のヒント (複素数平面)

アプローチ:

- (1) $|z-1| = |z-i|$ は「点1と点*i*から等距離にある点」の集合です。これは何の図形でしょうか?

$z = x+iy$ として、実部と虚部で式を立てる

- または、2点の垂直二等分線を考える

- (2) (1)の軌跡と $|z|=1$ (原点中心、半径1の円) の交点を求めます。
- (3) $w = z^2$ のとき、 z が直線上を動くとき w はどう動くか?

$z = re^{i\theta}$ を極形式で表すと、 $w = r^2 e^{2i\theta}$

- 偏角が2倍になることに注目

キーポイント:

- 複素数の絶対値: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

• 2点から等距離 → 垂直二等分線

• $z = x+iy$ として計算するか、極形式を使うか、問題に応じて選択

一般的なアドバイス

東大数学に取り組む姿勢

- あきらめずに考え続ける:** 10分考えても方針が立たない問題もありますが、それが普通です
- 部分点を意識:** 完答できなくても、方針や途中経過を丁寧に書けば評価されます
- 図を描く:** 空間図形や複素数平面は、図を描くことで見えてくるものがあります
- 既知の問題に帰着:** 「この部分は○○の公式が使える」「あの典型問題と似ている」と気づくことが鍵
- 時間配分:** すべての問題に目を通し、解けそうな問題から取り組むのも戦略です

解けなかった問題の復習法

- 解答を見る前に、もう一度ヒントだけで考えてみる
- 解答を見たら、「なぜその方針を思いつくべきだったか」を振り返る
- 類似問題を自分で作ってみる
- 1週間後にもう一度解き直す

Good luck!