

名前 \_\_\_\_\_

**Q1.** (20点)

関数  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$  について、以下の問いに答えよ。

- (1)  $f(x)$  の極値を求めよ。
- (2) 曲線  $y = f(x)$  と  $x$  軸で囲まれる部分の面積を求めよ。
- (3) 曲線  $y = f(x)$  上の点  $(t, f(t))$  における接線が原点を通るとき、 $t$  の値をすべて求めよ。
- (4) (3)で求めた接線と曲線  $y = f(x)$  で囲まれる部分の面積を求めよ。

**Q2.** (20点)

袋の中に赤玉2個、白玉3個が入っている。この袋から玉を1個取り出し、色を確認してから袋に戻す。この試行を繰り返す。

$n$  回目の試行後に、それまでに取り出した赤玉の個数が白玉の個数より多い確率を  $p_n$  とする。

- (1)  $p_1, p_2, p_3$  を求めよ。
- (2)  $p_n$  と  $p_{n+1}$  の関係式を求めよ。
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$  を求めよ。ただし、必要ならば以下の極限を用いてよい。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot r^n = 0 \quad (|r| < 1)$$

**Q3.** (20点)

四面体  $OABC$  において、 $OA = a, OB = b, OC = c$  とする。

ただし、 $|a| = 2, |b| = 3, |c| = 4, a \cdot b = 3, b \cdot c = 6, c \cdot a = 4$  とする。

- (1) 辺  $AB$  の長さを求めよ。
- (2)  $\triangle OAB$  の面積を求めよ。
- (3) 点  $C$  から平面  $OAB$  に下ろした垂線の長さを求めよ。
- (4) 四面体  $OABC$  の体積を求めよ。

**Q4.** (20点)

(1) 不定方程式  $13x + 17y = 1$  の整数解を1組求めよ。

(2) 不定方程式  $13x + 17y = 100$  のすべての整数解を求めよ。

(3)  $n$  を正の整数とすると、 $13^n + 17^n$  が30で割り切れることを証明せよ。

**Q5.** (20点)

複素数平面上の点  $Z$  が次の条件を満たすとする。

$$|z - 1| = |z - i|$$

- (1) この条件を満たす点  $Z$  の軌跡を図示せよ。
- (2) さらに  $|z| = 1$  を満たす点  $Z$  をすべて求めよ。
- (3) 点  $w = z^2$  が描く図形を求めよ。ただし、 $Z$  は(1)の条件を満たすものとする。



— おわり —